第16章　付章：Geometric Algebra

すでに見てきたように、線型代数学において、その基礎となるのは線型空間 (ベクトル空間) である．線型代数とは線型空間についての学であるといっても良い。しかしながら、和とスカラー倍を基本とする線型空間に，積を考えることによりその構造をさらに豊かにすることもできる．興味のある読者のために、これについてごく簡単にまとめておこう．以下は，まさに付録的な扱いであるから、本文の理解のためには必須ではないので，時間がなければ省いても良い．

16.1　多元環

まずは、線型空間と良く似た、しかしそれより‘弱い’(いいかえると，より一般的な) 代数構造の定義から始めよう．

定義 16.1.1 F を集合とする[1].集合 M が加法群であり，さらに $\forall\lambda \in F, \forall x \in M$ に対し, $\lambda x \in M$ が定義され、

1) $\forall\lambda \in F, \forall x, \forall y \in M, \lambda(x+y) == \lambda x + \lambda y$

が成り立つとき、M は集合 F を作用域 (operator domain) とする**加群**(module)，あるいは F に作用される加群，あるいはもっと簡単に F 上の加群 (module over F, あるいは F- module) であるという。

作用域である F に群の構造 (以下では演算記号を省く) が入ると、上の性質に加えて，

2) $\forall\lambda, \forall\mu \in F, \forall x \in M, (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

や

3) $\forall x \in M, 1x = x$　(1 は群 F の単位元)

という性質が満たされるとき，M は群 F を作用域とする**加群**，あるいは群 F 上の加群と呼ばれる．

作用域である F に環の構造が入ると、上の性質にさらに加えて，

4) $\forall\lambda, \forall\mu \in F, \forall x \in M, (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

が成り立つとき、M は 環 F を作用域とする加群であるという。さらに環 F が、乗法単位元 1 をもち，かつ 3) が満たされるなら，M は単位的な (unitary) な加群であるという。

[1] さしあたり F には代数構造はなにも仮定しない．

(**注**): 1° 加群といっても、作用域をどうとるかによって、その構造の豊かさは変わってくる。本書で述べてきたような体 F 上の線型空間 V は，は体 (したがって環である)F を作用域とする加群である。

2° 性質 1) や 4) は、λ倍, $\boldsymbol{x}$倍 という演算が '線型性' をもつことを示唆することにも注意しておこう.

線型空間の諸概念は、環 F を作用域とする加群 M においても同様に定義される．たとえば、線型結合は次のように定義される.

定義 16.1.2 環 F を作用域とする加群 M において、$\lambda_i \in F, x_i \in M(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in M$ を $x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ の線型結合と呼ぶ.

その他も同様である。

次にアルジェブラ (多元環) という代数構造を定義しよう。

定義 16.1.3 F を体[2]とする．A が環をなし[3]，かつ F 上の単位的な加群であり，さらに

$$\forall \lambda \in F, \forall a, \forall b \in A, \quad \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

が成り立つとき，A を，F 上の**多元環** という.

(**注**):英語圏では多元環のことを，**algebra** (直訳すれば，代数) と呼ぶ。方程式論から派生して発展してきた数学の分野の一つである「代数」あるいは「代数学」との混同を避けるために、多元環あるいはアルジェブラと呼ぶことがわが国では一般的である.

多元環と従来の線型空間との違いを一言で述べれば，体 F 上の線型空間 V において，その要素であるベクトルどうしの積 (記号 $\cdot$ で表そう) が定義され，

$$\forall \lambda \in F, \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \in V, \quad \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (\lambda \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (\lambda \boldsymbol{y})$$

が成り立つということである。

ここで、記号 $\cdot$ で表されるベクトルどうしの積がまたベクトルである点が重要である。この積の概念は，単なるスカラーになるベクトルの内積とも，また、$\mathbb{R}^3$ のベクトルに対して初等的に定義される，いわゆる外積ともさしあたっては区別されるべき概念である.

例 16.1 体 F に対し，係数を F にもつ多項式全体の作る環は、F 上の多元環である.

例 16.2 体 F に対し，F に成分をもつ n 次正方行列全体 $M(n; F)$ の作る環は、F 上の多元環である.

例 16.3 ハミルトンの四元数 (quaternion) 全体

$$\mathbb{H} = \{x + yi + zj + wk | x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

[2] 実は，単位元をもつ可換環でも良い.

[3] したがって、$a, b \in A$ に対して $a + b \in A$ のみならず $ab \in A$ が定義される.

ただし、ここで

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = ik = j$$

は $\mathbb{R}$上の多元環[4]である.

16.2 Geometric Algebra

多元環は、様々な方向に発展する。ここに紹介するのは，その中で，2 次形式に関連して展開されるクリフォード環 (Clifford algebra) を，より直観的に，より自然に発展させたといわれる[5]Geometric Algebra である。

(注): geometric algebra は日本語に直訳すれば, 幾何代数ないし幾何的代数となるが、algebra を代数を訳す以上に大きな誤解を招きかねないので、ここでは、英語のまま、あるいは、その頭文字で略して GA と呼ぶことにする。

GA の概念をまず概括的に述べよう.

GA の定義で重要なのは、ベクトルの積 (geometric product, 幾何学的積) である。ある GA G において，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ どうしの積 $\boldsymbol{ab} \in G$ が定義され,

$$\forall \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{b}, \forall \boldsymbol{c} \in G, \quad (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$$

$$\forall \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{b}, \forall \boldsymbol{c} \in G, \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$$

$$\forall \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{b}, \forall \boldsymbol{c} \in G, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$$

$$\forall \boldsymbol{a} \in G, \quad \boldsymbol{aa} = ||\boldsymbol{a}||^2)$$

を満たすものとする。

そして、二つのベクトルの積 $\boldsymbol{ab}$ をバイベクトル，二つのベクトルの積 $\boldsymbol{abc}$ をトリベクトル，$\cdots$ のように呼ぶ.

$\mathbb{R}^3$ の世界で定義される内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と外積 $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$ は，GA の積 $\boldsymbol{ab}$ を用いて、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba})$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba})$$

と表され、したがって、

$$\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$$

となる．このように GA における (幾何学的) 積は，ベクトルの内積と外積とからなる新しい積である。

[4] 実は，体でもある.

[5] これについては異論がある。しかし、GA の直観的な分りやすさは、放送講義における簡単な紹介でも納得できよう.

16.2.1 GA の定義

少し詳しく GA を定義しよう[6].

そもそも、ベクトルどうしの一般的な積は，歴史的には，Grassmann が，$\mathbb{R}^n$ の標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ に対して、以下の積の規則を設けたのが最初であろう.

$$\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l = -\mathbf{e}_l \wedge \mathbf{e}_k, k \neq l$$

$$\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_k = 0.$$

こうして、彼は結合律を満たし、単位元 1 を持つ、 2^n 次元のアルジェブラ $\bigwedge \mathbb{R}^n$ を定義することができた。$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底を使って表すと、このアルジェブラ (exterior algebra) $\bigwedge \mathbb{R}^n$ は、基底として

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \\
&\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n \\
&\vdots \\
&\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$

を持つ.

結合律を満たし、双線型性を持つベクトルの (幾何的な) 積を定義するために、クリフォードは、正規直交基底についてのグラスマンの積の性質

$$\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = -\mathbf{e}_l \mathbf{e}_k, k \neq l,$$

を使ったが、2 乗、すなわち自分自身との幾何的な積に関しては実数であるとした.

$$\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \pm 1.$$

このように定義された、結合律を満たす 2^n 次元のアルジェブラを GA $\mathbb{R}_n$ と呼ぶ.

16.2.2 GA を利用した複素数のもう一つの導入

GA $\mathbb{R}_n$ の特別な場合として、 $\mathbb{R}_2$ を考えよう.

$\mathbb{R}_2$ は 4 次元の実アルジェブラであり、基底として $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$. を持つ。乗積表は次の通りである。

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

$\mathbb{R}_2$ は、それぞれ、以下のベクトルで張られるグレード 0, 1 2 の部分空間を持つ。

[6] 以下の叙述は，後に引用する C J. L. Doran 論文と放送講義にゲストとして出演していただいた E.Hitzer 先生のご教示におっている.

1	$\mathbb{R}$	スカラー (偶)
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	$\mathbb{R}^2$	ベクトル (奇)
$\mathbf{e}_{12}$	$\bigwedge^2 \mathbb{R}^2$	バイベクトル (偶)

GA $\mathbb{R}_2$ は、その偶部分と奇部分の直和 $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R}_2^+ \oplus \mathbb{R}_2^-$ として表現できる。
$\mathbb{R}_2^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ (偶)
$\mathbb{R}_2^- = \mathbb{R}_2$ (奇).
偶部分は部分空間であるのみならず、部分アルジェブラであり、かつ複素数体 $\mathbb{C}$ と同型である。

16.2.3 対称移動と回転移動

ユークリッド空間で、ある定点 を原点とする。するとすべての点は、その位置ベクトル $\mathbf{x}$ で定められる。. O を通る任意の直線は、$\mathbf{aa} = 1$ を満たす、ある (単位) ベクトル $\mathbf{a}$ で表される。ベクトルの幾何的な積では、平行な成分どうしの積は持つ交換律を満たし、直交する成分のどうしの積は反交換律を満たすという事実を使うと、一般のベクトル $\mathbf{x}$ に対して、($\mathbf{a}$ と) 直交する成分の符号を

$$\mathbf{x}' = \mathbf{axa} = \mathbf{aa}(\mathbf{x}_{||} - \mathbf{x}_{\perp}) = \mathbf{x}_{||} - \mathbf{x}_{\perp}.$$

によって逆転できる。

これは点 O を通り $\mathbf{a}$ を方向とする直線に関する対称移動を表現する。

角 $\theta/2$ をなす 2 直線に関する対称移動の合成は角 θ の**回転移動** である。2 直線が点 O で交わり、それぞれ単位ベクトル $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ (これらは角 $\theta/2$ をなす) に平行であるとすると、角 θ の回転は

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{bx}'\mathbf{b} = \mathbf{ba}\,\mathbf{x}\,\mathbf{ab}.$$

で表現される。

積 $R = \mathbf{ba}$ は *ro*tation opera*tor* であることから, ロータ *rotor* と呼ばれる. 順序を逆にした積 $\widetilde{R} = \mathbf{ab}$ は、単に *reverse* と呼ばれることが多い.

ベクトル $\mathbf{c}$ と $\mathbf{b}$ のなす角 $\vartheta'/2$ の 2 倍の回転を引き起こすロータ $R' = \mathbf{cb}$ を引き続いて行なうと、予想されるように角 $\vartheta + \vartheta'$ の回転を与えることになり、

$$\mathbf{x}''' = \mathbf{cbba}\,\mathbf{x}\,\mathbf{abbc} = \mathbf{ca}\,\mathbf{x}\,\mathbf{ac}$$

はロータ $R'' = R'R$ である。ゆえに、二つのロータの積はまたロータである。これにより回転の複回転群ができる。(複 (di) $\pm R$ というロータが異なる方向に向きづけられた回転を同一視することを意味する。(物理では、この表現を回転群のスピン-$\frac{1}{2}$ 表現という.)

ユークリッド空間内のある平面上のすべてのユニタリ・ロータ ($R\widetilde{R} = 1$) のなすアルジェブラは、すべての偶元の GA $\mathbb{R}_2$ の偶部分アルジェブラである。したがって、複素平面単位円と同型である。リバース演算は複素共役に対応する。

16.3 GA(Geometric Algebra) による行列式

GA から，その直観的なアプローチを予感させるもう一つの話題を取り上げよう。

16.3.1 定義

f は 実線型空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像，言い換えると, ある自己準同型写像 (endomorphism)

$$f : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \to \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^n.$$

である。この関数は，**アウタモルフィズム**(*outermorphism*) の考え方を利用して，記号 $\underline{f}$ で表現される，マルチベクトル (multivector) 上の線型写像に拡張される。

$$\underline{f}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \ldots \wedge \mathbf{a}_k) = f(\mathbf{a}_1) \wedge f(\mathbf{a}_2) \ldots \wedge f(\mathbf{a}_k), \ \ k \leq n.$$

定義から， $\underline{f}$ はマルチベクトルをマルチベクトルに移す，グレードを保存する線型写像である。具体例としては，すでに述べた対称移動、回転、平行移動などがある。二つの線型写像の積 fg のアウタモルフィズムはアウタモルフィズム $\underline{f}\,\underline{g}$ の積である．

$$f[g(\mathbf{a}_1)] \wedge f[g(\mathbf{a}_2)] \cdots \wedge f[g(\mathbf{a}_k)] = \underline{f}[g(\mathbf{a}_1) \wedge g(\mathbf{a}_2) \ldots \wedge g(\mathbf{a}_k)] = \underline{f}[\underline{g}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \ldots \wedge \mathbf{a}_k)],$$

ここで $k \leq n$ である．鍵括弧は省いても大丈夫である。

グレード n の GA の疑似スカラー (pseudoscalar) は，スカラー倍の違いを除いて一意に決まる．このことを用いて線型写像の行列式[7] が次のように定義できる[8]．

$$\det(f) = \underline{f}(I)I^{-1} = \underline{f}(I) * I^{-1} \ \ \text{したがって} \ \ \underline{f}(I) = \det(f)I.$$

正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ については，単位疑似スカラーは $I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n$ であり、その逆は $I^{-1} = (-1)^q \mathbf{e}_n \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 = (-1)^q (-1)^{n(n-1)/2} I$ である。ここで q は 2 乗すると -1 になる基底ベクトルの個数である．(線型空間はこの場合には、$\mathbb{R}^{p,q}$ となる．) グラスマンによると、グレード n のベクトルは次元 n の向きつけられた "体積 '' を表す。行列式はしたがって、こういった体積が，線型写像によってどのように代わるかを示す。さて、このような線型写像によって，体積がどのように変化するかを示す。二つの線型写像を合成することはこれらの二つの体積因子をの積を与える。

$$\underline{f}\,\underline{g}(I) = \underline{f}[\det(g)I] = \det(g)\underline{f}(I) = \det(g)\det(f)I.$$

したがって

$$\det(fg) = \det(g)\det(f).$$

GA については，日本語で読めるものは少ない。以下を参照して欲しい。

C J. L. Doran, Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 181 pages (1994).
http://www.mrao.cam.ac.uk/~clifford/publications/abstracts/chris_thesis.html

L. Dorst et. al. (eds.), Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering, Birkhaeuser, Basel, 2002.

D. Hestenes, G. Sobczyk, Clifford Algebra to Geometric Calculus, Kluwer, Dordrecht, reprinted with corrections 1992.

[7] ここで記号 $(*)$ は二つのマルチベクトルの (対称) スカラー積，すなわち、それらの幾何学的な積のスカラー (グレード 0 の) 部分を意味する．

[8] 疑似スカラー I はグレード n をもち，n 次元の体積を表す。線型写像はこの体積のスカラー量を増大させたり減少させたりする。したがって $\underline{f}(I)$ を I で割るとこの体積がどれほど変化させられたか (増加させられた、減少された，向きを変えられた) についての尺度を得ることになる．